

イオンの速度の概算*

Table-Top Laboratory

2005年4月2日

2つの荷電粒子 q_1 と q_2 が運動している時、その間に働く相互作用はクーロン力と、速度に依存する力^{*1} の和で表されます。 $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ とすると、電荷 q_1 に働くクーロン力 \mathbf{F}_c は

$$\mathbf{F}_c = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} \quad (1)$$

速度に依存する力 \mathbf{F}_v は

$$\mathbf{F}_v = \frac{\mu_0 q_1 q_2}{4\pi} \frac{\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3} \quad (2)$$

となります。^{*2} この2つの力の大きさの比は

$$\frac{|\mathbf{F}_v|}{|\mathbf{F}_c|} = \frac{\epsilon_0 \mu_0 |\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{r}_{12})|}{|\mathbf{r}_{12}|} \quad (3)$$

となりますが、 $\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$ (c : 真空中の光速) に注意すれば、おおまかには

$$\frac{|\mathbf{F}_v|}{|\mathbf{F}_c|} \approx \frac{v_1 v_2}{c^2} \quad (4)$$

であることがわかります。したがって、粒子の速度 v_1, v_2 が光速 c に比べ十分小さければ、速度に依存する力 \mathbf{F}_v の寄与はほとんど無視できる、すなわち、作用反作用の法則は成り立っていると考えてよくなります。

ここで、イオンの速度を概算してみます。テレビのブラウン管などを電源に用いた場合、エミッターとコレクターの間の電位差はおよそ 30kV です。エミッターで発生したイオンが電子1個分の正電荷を持っているとすると、このイオンがコレクターに到達するまでに得る運動エネルギーは $E = 30\text{keV} \simeq 4.8 \times 10^{-15}\text{J}$ となります。これより、イオンの質量を $m = 4.7 \times 10^{-26}\text{kg}$ (N_2 分子の質量) とし、イオンの初期速度を 0 とすれば、コレクターに到達した時のイオンの速度 v は

$$E = \frac{1}{2} m v^2 \therefore v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 4.5 \times 10^5 [\text{m/s}] \quad (5)$$

となります。この速度は光速 $c = 3.0 \times 10^8 \text{m/s}$ に比べれば十分小さいといってよいものです。さらに、上で計算したものはイオンが何にも衝突せずにコレクターに到達した場合の最終速度であり、実際にはイオンは空気分子との衝突をくり返して速度を失うので、イオンの平均速度はこれよりもさらに遅くなると考えられます。

* HTML で数式をきれいに書く方法がわからなかったため、 $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X} 2_{\epsilon}$ で作成しました。

*1 これが作用反作用の法則を破ります。詳しくは、太田浩一著「電磁気学 I,II」などを参照。

*2 ただし、どちらも荷電粒子の速度が光速よりも小さい場合の近似式です。荷電粒子の速度が光速に近い場合、「遅延効果」というものを取り入れる必要があります